



تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۶/۰۱

کد اجرا: نامشخص



پرتو دانش

زمان برگزاری: ۲۰ دقیقه

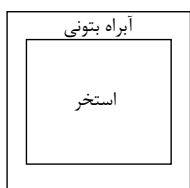
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آزمون حسابان ۱ - تشریحی - مردادماه

۱) معادله مقابل را حل کنید.

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$$

۲) یک استخر مستطیل شکل به ابعاد، طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



۳) مجموع همی عددی طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

۴) در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۵) بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید.

۶) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر -2 باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

۷) جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ می‌باشد. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع ۲۵۵ شود؟

۸) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.

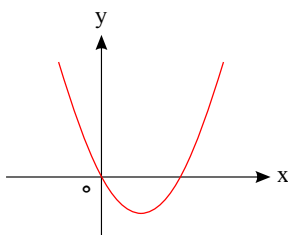
۹) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند.

الف) مقدار عددی $2\alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha - 3$ را بدست آورید.

ب) معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش معکوس و قرینه‌ی ریشه‌های معادله فوق باشد.

۱۰) شکل زیر نمودار تابع $P(x) = ax^2 + bx + c$ است. الف) علامت a و b را تعیین کنید.

ب) مقدار c را بیابید.





پاسخنامه تشریحی

۱ با تغییر متغیر $k - x^2 = k$ معادله را تبدیل به یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ کرده و آن را حل می‌کنیم.

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0 \xrightarrow{4 - x^2 = k} k^2 - 2k - 15 = 0 \rightarrow (k + 3)(k - 5) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = -3 \rightarrow 4 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ k = 5 \rightarrow 4 - x^2 = 5 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{غ.ق.ق.} \end{cases}$$

x	x	x
x	۱۰	
	۳	۳
x	۱۰	x
x	x	

$$\text{اگر پهنای آبراه } S = 4x^2 + 2 \times 10 \times x + 2 \times 3 \times x = 14$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 20x + 6x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 26x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 13x - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 13^2 - 4 \times 2(-7) = 169 + 56 = 225$$

$$x = \frac{-13 \pm 15}{4} = -7 \quad \text{غ.ق.ق.} \quad , \quad x = \frac{1}{2}$$

$$10 \leq 4k \leq 99 \Rightarrow 2,5 \leq k \leq 24,75$$

$$k = 3, 4, 5, \dots, 24 \Rightarrow n = 24 - 3 + 1 = 22$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$12, 16, 20, \dots, 96 \quad a_1 = 12, \quad d = 4$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}(a_1 + a_{22}) = 11(12 + 96) = 1188$$

۴ جملات فرد دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت $2d$ می‌باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است. پس:

$$\text{فرد } S = \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 2d) = 135 \rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

جملات زوج نیز دنباله‌ای حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ می‌باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است. پس:

$$\text{زوج } S = \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 2d) = 150 \rightarrow 2(a_1 + d) + 18d = 30 \rightarrow a_1 + 10d = 15$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ a_1 + 10d = 15 \end{cases} \Rightarrow d = 1,5, \quad a_1 = 0$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 150 \\ a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135 \end{cases}$$

$$\underbrace{a_2 - a_1}_d + \underbrace{a_4 - a_3}_d + \dots + \underbrace{a_{20} - a_{19}}_d = 150 - 135 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1,5$$

$$S_{20} = 135 + 150 \Rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 285 \Rightarrow 2a_1 + 19 \times 1,5 = 28,5 \rightarrow a_1 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} = 2 \quad y = -4 + 8 + 1 = 5 \quad \text{بیشترین مقدار}$$

$$x = -2 \rightarrow x^2 + kx^2 - x - 2 = 0 \rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \rightarrow k = 2$$

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 2$$

$f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است.



$$x^r + 2x^r - x - 2 \mid \begin{array}{l} x+2 \\ x^2-1 \\ \hline -x^r - 2x^r \\ -x - 2 \\ \hline +x + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+2)(x^r-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

روش دیگر: می توان $f(x)$ را تجزیه کرد.

$$x^r + 2x^r - x - 2 = x^r(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^r-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

۷

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} \Rightarrow a_1 = 1, q = 2 \rightarrow \text{دنباله: } 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$S_n = 255 \rightarrow \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \rightarrow n = 8$$

نکته: اگر α و β ریشه های معادله ی درجه دوم باشد، آنگاه معادله بصورت $x^2 - Sx + P = 0$ است که در آن $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ می باشد:

۸

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{2+2}{-1+2+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(\frac{1}{\beta+1}\right) = \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{1}{-1+2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{معادله: } x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

توجه کنیم که چون α ریشه ی معادله است پس در معادله صدق می کند. بنابراین:

۹

$$x^2 + 3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha = 1$$

الف

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -3 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha - 3 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 + 3\alpha - 3$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2 + 3\alpha - 3 = 9 + 2 + 1 - 3 = 9$$

ب

$$x' = -\frac{1}{\alpha} \text{ و } x'' = -\frac{1}{\beta}$$

$$\begin{cases} S_{\text{جدد}} = x' + x'' = -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right) = -3 \\ P_{\text{جدد}} = x'x'' = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) = \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 0$$

۱۰

الف) طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ ، مقداری مثبت است. از طرفی دهانه ی سهمی رو به بالا بوده و لذا $a > 0$ است. بنابراین:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$

ب) محل تلاقی نمودار تابع سهمی با محور y ها، c است. بنابراین $c = 0$ است.

