



کد اجرا: نامشخص

تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۶/۰۱



پرتو دانش

زمان برگزاری: ۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: آزمون ریاضی و آمار-تستی-مردماه

۱ در معادله درجه دوم  $2x^2 + kx + 1 - k = 0$ ، اگر حاصل ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشه بزرگ تر کدام است؟

- ۱) ۲٫۵      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

۲ اگر  $f(x) = 4x + 2 - 3f(0)$  باشد، مقدار  $f(1)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{11}{2}$       ۲) ۵      ۳)  $\frac{9}{2}$       ۴) صفر

۳ اگر  $f = \{(m^2 - 4, 5), (m^2 - 4, m^2 - 11), (8 + m, 2)\}$  یک تابع باشد،  $m$  کدام است؟

- ۱) فقط ۴+      ۲) فقط -۴      ۳)  $\pm 4$       ۴) هیچ مقداری برای  $m$  وجود ندارد.

۴ در مورد معادله گویای  $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{4}{2x^2 - 2x}$ ، کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) دو جواب منفی دارد.      ۲) یک جواب دارد.  
۳) جواب حقیقی ندارد.      ۴) حاصل ضرب جواب هایش صفر می شود.

۵ می خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۵۶ متر، زمینی به شکل مستطیل، که یک طرف آن دیوار است محصور شود. بیشترین مساحت زمین محصور شده، کدام است؟



- ۱) ۳۶۴      ۲) ۳۷۸      ۳) ۳۹۲      ۴) ۴۰۶

۶ در یک کارگاه تولید چتر، سود روزانه حاصل از فروش  $x$  چتر از رابطه  $p(x) = -0.004x^2 + 0.48x - 8$  به دست می آید. به ازای فروش چه تعداد چتر، کارگاه به نقطه سربه سر خود می رسد؟ (کارگاه در یک روز حداکثر ۶۰ چتر می تواند تولید کند).

- ۱) ۲۰      ۲) ۳۰      ۳) ۴۰      ۴) ۵۰

۷ ریشه های معادله  $x^2 + 11x - 42 = 0$  چگونه است؟

- ۱) یک ریشه مضاعف منفی دارد.      ۲) دو ریشه مثبت دارد.  
۳) یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد.      ۴) فاقد ریشه حقیقی است.

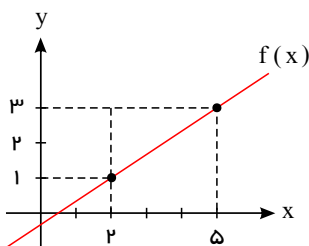
۸ به ازای کدام مقدار  $a$ ، معادله  $\frac{4}{a-2x} + \frac{a}{x+1} = \frac{a}{x}$  دارای جواب  $x = 1$  است؟

- ۱) -۴، ۲      ۲) -۲، ۴      ۳) ۲، ۴      ۴) -۲، ۳

۹ اگر به دو برابر یک سوم عددی ۵ واحد اضافه کنیم، برابر با نصف آن عدد منهای یک است. آن عدد کدام است؟

- ۱) ۳۶      ۲) -۳۶      ۳) ۱۸      ۴) -۱۸

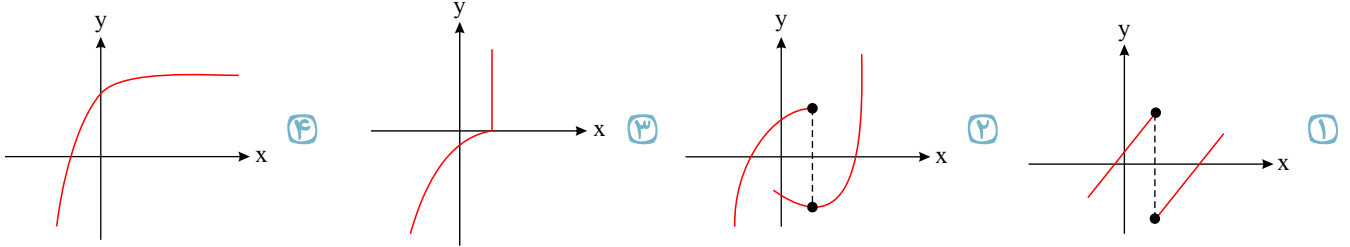
۱۰ نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است.  $f(3)$  کدام است؟



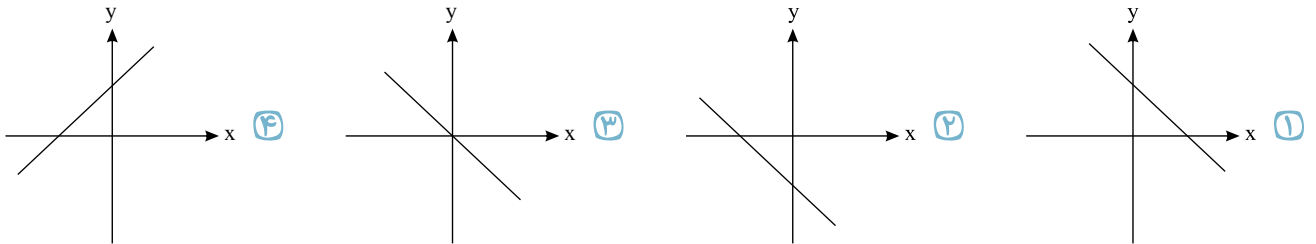
- ۱) ۲      ۲)  $\frac{5}{3}$       ۳)  $\frac{7}{4}$       ۴) ۳



۱۱ کدام نمودار، نمایش یک تابع  $y = f(x)$  است؟



۱۲ نمودار تقریبی تابع خطی  $f(x) = -ax - b$  (که  $b < 0, a > 0$ ) کدام است؟



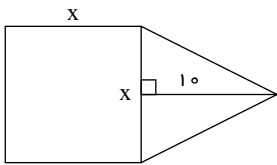
۱۳ مجموع ضرایب معادله درجه دومی صفر است. کدام عدد همواره ریشه معادله است؟

- ۱ -۱      ۲ صفر      ۳  $\frac{1}{2}$       ۴ ۱

۱۴ اگر رابطه  $\{(3, a + 2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a - b)\}$  یک تابع باشد،  $a^2 - b^2$  کدام است؟

- ۱ ۳      ۲ ۴      ۳ ۵      ۴ ۶

۱۵ در شکل زیر، مساحت مثلث متساوی الساقین، از  $\frac{2}{3}$  مساحت مربع به اندازه  $\frac{8}{3}$  واحد مربع، کمتر است. مساحت مثلث کدام است؟



- ۱ ۳۰      ۲ ۳۵      ۳ ۴۰      ۴ ۴۵

۱۶ یک کارگاه نوعی کالا تولید می‌کند و هر واحد آن را ۲۴۰ ریال می‌فروشد. اگر صاحب کارگاه در هر روز،  $x$  واحد کالا تولید کرده و تابع هزینه

$$C(x) = x^2 + 60x + 200$$

آن بیشترین سود روزانه آن کدام است؟

- ۱ ۵۶۰۰      ۲ ۶۱۰۰      ۳ ۷۹۰۰      ۴ ۸۱۰۰

۱۷ رابطه  $f = \{(a, x + y), (b, m^2), (a, m^2 - 1), (b, x - y), (a, 4)\}$  یک تابع است. مقدار  $x^2 + y^2$  کدام است؟

- ۱ ۲٫۵      ۲ ۲۰٫۵      ۳ ۲۴      ۴ ۴۲

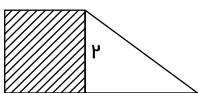
۱۸ محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکسیمم مساحت این مستطیل، چقدر است؟

- ۱ ۲۲۵      ۲ ۲۰۹      ۳ ۵۶٫۲۵      ۴ ۱۱٫۲۵

۱۹ نمودار یک تابع خطی از نقاط  $(-2, a), (-1, 3), (1, -4)$  می‌گذرد. مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱ ۶      ۲ ۶٫۵      ۳ ۷      ۴ ۷٫۵

۲۰ در شکل زیر، مساحت مربع از  $\frac{1}{3}$  مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت ذوزنقه، کدام است؟



- ۱ ۵      ۲ ۵٫۵      ۳ ۶٫۵      ۴ ۷



## پاسخنامه تشریحی

1 2 3 4 1

$$2x^2 + kx + 1 - k = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = 5 \Rightarrow \frac{1-k}{2} = 5 \Rightarrow 1-k = 10 \Rightarrow k = -9$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 81 - 80 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2(2)} \Rightarrow \text{ریشه بزرگ‌تر} = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

2 برای به دست آوردن  $f(1)$  داریم:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \times 1 + 2 - 3f(0) \Rightarrow f(1) = 6 - 3f(0) \quad (1)$$

حال  $f(0)$  را در ضابطه تابع به دست می‌آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 \times (0) + 2 - 3f(0) \Rightarrow 4f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} f(1) = 6 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

1 2 3 4 3

در تابع اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول برابر باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باهم برابر باشند.

$$(m^2 - 4, 5) = (m^2 - 4, m^2 - 11) \Rightarrow m^2 - 11 = 5 \Rightarrow m^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} m = \pm 4$$

$$m = 4 \Rightarrow f = \{(12, 5), (12, 2)\} \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

$$m = -4 \Rightarrow f = \{(12, 5), (4, 2)\} \Rightarrow f \text{ تابع است}$$

پس فقط جواب  $m = -4$  قابل قبول است.

4 در سمت چپ تساوی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{4}{2x(x-1)} \Rightarrow \frac{2x(x+2) + (x-1)(x-4)}{2x(x-1)} = \frac{4}{2x(x-1)}$$

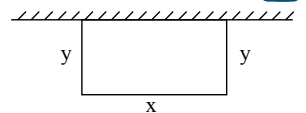
مخرج‌ها در دو طرف تساوی برابر است. در نتیجه:

$$\xrightarrow{x \neq 0, 1} 3x^2 - x + 4 = 4 \Rightarrow 3x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (غ. ق. ق.)} \\ x = \frac{1}{3} \text{ (ق. ق.)} \end{cases}$$

جواب  $x = 0$  قابل قبول نیست. چون باعث صفر شدن یکی از مخرج‌ها در معادله اولیه می‌شود و تنها جواب معادله  $x = \frac{1}{3}$  است.

5 طول مستطیل را  $x$  و عرض آن را  $y$  در نظر می‌گیریم:



$$2y + x = 56$$

$$\Rightarrow x = 56 - 2y \quad (1)$$

$$\text{مساحت} = S = xy$$

$$\xrightarrow{(1)} S = (56 - 2y)y \Rightarrow S = 56y - 2y^2 \Rightarrow S_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(56^2 - 0)}{4 \times (-2)} = 392$$

1 2 3 4 6

در نقطه سربه‌سر سود برابر صفر است.

$$p(x) = 0 \Rightarrow (-0,0004x^2 + 0,48x - 8 = 0) \times (-1000) \Rightarrow 4x^2 - 480x + 8000 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} x^2 - 120x + 2000 = 0$$

$$\Rightarrow (x-100)(x-20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 100 \text{ (حد اکثر تولید 60 است)} \\ x = 20 \text{ (ق. ق. \checkmark)} \end{cases}$$

1 2 3 4 7

$$x^2 - 11x - 42 = 0 \quad a = 1, \quad b = -11, \quad c = -42$$

از آن جایی که حاصل  $\frac{c}{a}$  برابر  $\frac{-42}{1}$  عددی منفی است پس حتماً  $\Delta > 0$  بوده و دو ریشه دارد که مختلف‌العلامت هستند یعنی یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.



۸ ابتدا در معادله به جای  $x$  عدد ۱ قرار می‌دهیم: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\frac{4}{a-2} + \frac{a}{2} = a \xrightarrow{(1)} \frac{4}{a-2} = \frac{a}{2} \Rightarrow a^2 - 2a = 8 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$$

تجزیه

$$\rightarrow (a-4)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-2 \end{cases}$$

۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

۵ واحد اضافه می‌کنیم ۲ برابر  $\frac{1}{3}$  عددی  $\frac{1}{3}$  عددی

→ →

$$\frac{1}{3}x \quad 2 \times \frac{1}{3}x \quad 2 \times \frac{1}{3}x + 5$$

$$2 \times \frac{1}{3}x + 5 = \frac{1}{3}x - 1 \xrightarrow{\times 6} 4x + 30 = 2x - 6 \Rightarrow 4x - 2x = -6 - 30 \Rightarrow x = -36$$

۱۰ نمودار  $f$  خطی است که از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌گذرد. معادله این خط را می‌نویسیم: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1 - 3}{2 - 5} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} A \mid 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{y - y_A = m(x - x_A)} y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(3) = \frac{2}{3} \times (3) - \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

۱۱ گزینه «۴» صحیح است، زیرا در گزینه‌های «۱»، «۲»، «۳» خطی موازی محور  $y$ ها می‌توان رسم کرد که نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع می‌کنند. (۱) (۲) (۳) (۴)

۱۲ ضابطه تابع خطی  $f(x) = -ax - b$  را به صورت خط  $y = -ax - b$  در نظر می‌گیریم: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$y = -ax - b \Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = -a \\ \text{عرض از مبدأ} = -b \end{cases}$$

در فرض سوال گفته شده  $a > 0$  پس  $-a$  حتماً منفی است. یعنی شیب خط منفی است. ضمناً گفته شده  $b < 0$  پس  $-b$  مثبت و عرض از مبدأ خط مثبت است. بنابراین شکل گزینه (۱) درست است.

۱۳ می‌دانیم که وقتی مجموع ضرایب درجه دوم صفر است. همیشه یکی از ریشه‌ها ۱ و ریشه دیگر  $\frac{c}{a}$  است. (۱) (۲) (۳) (۴)

۱۴ در نمایش تابع با زوج مرتب مؤلفه‌های اول هر دو زوج مرتب متمایز باید متفاوت باشند. بنابراین در صورت برابری مؤلفه‌های اول، مؤلفه‌های دوم نیز برابرند. (۱) (۲) (۳) (۴)

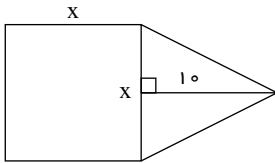
$$f = \{(3, a + 2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a - b)\}$$

$$\begin{cases} (3, a + 2b) \in f \\ (3, 7) \in f \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع است}} a + 2b = 7, \begin{cases} (5, 4) \in f \\ (5, 2a - b) \in f \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع است}} 2a - b = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 7 \\ 2a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 7 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{a+2b=7} b = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

۱۵ شکل زیر را در نظر بگیرید: (۱) (۲) (۳) (۴)



بنا به فرض سوال داریم:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{2}{3} \times \text{مساحت مربع} - \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x \times 10}{2} = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3} \xrightarrow{\times 3} 15x = 2x^2 - 8 \Rightarrow 2x^2 - 15x - 8 = 0$$

$$\Delta = 225 - 4 \times 2 \times (-8) = 289 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{-1}{2} \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

در نتیجه مساحت مثلث برابر است با:



### پرتو دانش

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{x \times 10}{2} = 5x = 5 \times 8 = 40$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$x$  = تعداد کالا، (ریال) قیمت فروش = ۲۴۰

$$R(x) = \text{درآمد} = \text{تعداد} \times \text{قیمت فروش} = (x)(240) = 240x$$

تابع سود برابر است با:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 240x - (x^2 + 60x + 200) = -x^2 + 180x - 200$$

برای محاسبهٔ ماکزیمم سود رأس سهمی را به دست می آوریم؛ داریم:

$$\text{طول رأس سهمی: } x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-180}{-2} = 90$$

سود ماکزیمم برابر است با:

$$P(90) = -(90)^2 + 180 \times 90 - 200 = -8100 + 16200 - 200 = 7900$$

در زوج مرتبها با مؤلفه های اول یکسان مؤلفه های دوم را برابر قرار می دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$(a, m^2 - 1) = (a, 4) \Rightarrow m^2 - 1 = 4 \Rightarrow m^2 = 5$$

$$(a, x + y) = (a, 4) \Rightarrow x + y = 4$$

$$(b, x - y) = (b, m^2) \Rightarrow x - y = m^2 = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}, y = 4 - \frac{9}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{81}{4} + \frac{1}{4} = \frac{82}{4} = 20.5$$

طول و عرض مستطیل را به ترتیب  $x$  و  $y$  در نظر می گیریم و با توجه به فرض مسئله داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$2(x + y) = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$$

$$S = xy = x(15 - x) = -x^2 + 15x$$

$$x_{max} = \frac{-15}{-2} = 7.5 \Rightarrow y_{max} = 7.5 \Rightarrow S = 7.5 \times 7.5 = 56.25$$

چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، شیب خط گذرنده از نقاط  $(-1, 3)$  و  $(1, -4)$  با شیب خط گذرنده از نقاط  $(-2, a)$  و  $(-1, 3)$  برابر است. در نتیجه: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$\frac{3 - (-4)}{-1 - 1} = \frac{a - 3}{-2 - (-1)} \Rightarrow \frac{7}{-2} = \frac{a - 3}{-1} \Rightarrow -2a + 6 = -7 \Rightarrow -2a = -13 \Rightarrow a = 6.5$$

با توجه به شکل داده شده ضلع مربع برابر ۲ است و اضلاع قائمه مثلث قائم الزاویه را  $x$  و  $y$  در نظر می گیریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$3 + \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت مربع}$$

$$2^2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2 \times x}{2}\right) + 3$$

$$4 = \frac{1}{3}x + 3 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2} = \frac{(2 + 5) \times 2}{2} = 7$$

# پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴